SCIENZA & TECNICA

Annuario della EST

86-87

estratti

pesa fra alberi tubolari

trutture di Arrigo Cart...
iente i centri direziona...
da travature metallich...
zo.

endendo intuibile lo
cessario e nascosto.

MANFREDI NICOLETTI

dt F., *Ponts- Puentes*, L...
., *Tensile structures*, vol.
. (1986); Walther R., *Pont*
985); Wittfont H., *Buis*...
1984); Otto F., *L'archit*...
lano (1984); Billington D.
idge, New York (1983).

LUCIO SAFFARO

Nuovissime operazioni sui poliedri platonici

Esistono poliedri composti di soli triangoli equilateri, i deltaedri, che si potrebbero chiamare platonici e che costituiscono una sottoclasse ristretta, ma di cospicuo interesse estetico e strutturale, della classe infinita dei deltaedri. Ed esistono persino poliedri immaginari che, pur nella loro totale astrazione, presentano notevoli proprietà combinatorie

Può la geometria rientrare in una teoria dei caratteri esteriori?

Novalis (*Frammenti matematici*)

Una ferrea legge, la ben nota formula di Eulero, regola l'esistenza dei poliedri convessi nello spazio. Essa pone in relazione F (numero delle facce di un poliedro), S (numero degli spigoli) e V (numero dei vertici): $F-S+V = 2$.

Un poliedro risulta interessante, tanto da un punto di vista matematico quanto da un punto di vista estetico, se presenta qualche regolarità. Esprimendo analiticamente tali regolarità si ottengono uno o più nuovi vincoli tra F, S e V: questi vincoli, insieme a quello citato di Eulero, pongono condizioni così restrittive all'esistenza dei poliedri desiderati che questi possono esistere solo in numero finito, e anche molto piccolo. Se si cercano i poliedri le cui facce siano poligoni regolari uguali, uniti allo stesso modo in tutti i vertici, si trovano solo i cinque poliedri platonici. Se si lascia cadere la condizione che i poliedri siano convessi, si possono costruire i quattro poliedri di Keplero-Poinsot, le cui facce si intersecano vicendevolmente. Se si rinuncia alla condizione che le facce, pur restando poligoni regolari, siano tutte uguali tra loro, si trovano i tredici poliedri archimedei e, lasciando cadere anche in questo caso la condizione della convessità, se ne possono costruire altri cinquantatré. Infine, rinunciando alla regolarità delle facce, mantenendo però la condizione che restino tutte uguali fra loro, si possono costruire ancora i tredici poliedri catalaniani.

A questo punto la ricerca sarebbe conclusa se non si tentassero nuove vie, allargando necessariamente le possibili definizioni di poliedro. La geometria moderna ha superato l'ostacolo della finitezza delle possibili classi di poliedri dotati di qualche regolarità generalizzando la relazione di Eulero nel modo seguente: $F-S+V = f(g_1, g_2,..., g_n)$, dove f è una funzione di un certo numero di parametri che rappresentano le caratteristiche della superficie su cui può essere tracciato il grafo corrispondente al poliedro. Si possono in tal modo costruire poliedri tanto complessi da non poter essere nemmeno rappresentati. Un altro metodo può essere quello di mantenere sempre valida la relazione di Eulero e di generalizzare invece i concetti che stanno alla base della struttura di un poliedro. In precedenti lavori si è mostrato come ciò sia possibile introducendo il concetto di poligono frazionario e quindi di poliedro frazionario, e inoltre il concetto di poliedro costituito da un numero negativo di elementi. Nel presente lavoro si procederà nella ricerca introducendo sia la nozione di poligono sghembo, sia quella di poliedro costituito da un numero complesso di elementi.

I POLIEDRI IMMAGINARI

Come è noto, un poliedro regolare formato da facce poligonali regolari di p lati, riunite a q a q intorno a un vertice, è rappresentato dal simbolo $\{p, q\}$, dal quale si possono ricavare tutte le informazioni essenziali sulla sua struttura per mezzo delle formule:

$$F=\frac{4q}{2p+2q-pq},\quad S=\frac{pF}{2},\quad V=\frac{pF}{q},$$

$$\sin\frac{\gamma}{2}=\cos\frac{\pi}{q}\ \operatorname{cosec}\frac{\pi}{q} \qquad (1)$$

I cinque poliedri classici corrispondono alle cinque possibili coppie di interi p e q che si possono dedurre dalla formula di Eulero. Qui si introduce la nozione di poliedro immaginario (non si usa il termine *complesso* per non creare confusione con il concetto di *poligono complesso* introdotto da Sommerville nel 1929), definendolo come coppia di numeri complessi $\{(a+ib), (c+id)\}$, con a, b, c, d numeri interi relativi, tale che anche i numeri F delle facce, S degli spigoli e V dei vertici che da essa si possono dedurre secondo le (1) siano numeri complessi con coefficienti interi relativi.

Perché ciò sia possibile occorre intanto che $F = 4q/(2p+2q-pq) = 4(c+id)/(2a+2ib+2c+2id-ac-adi+-bci+bd)$ risulti un numero complesso con coefficienti interi relativi. Dopo opportuni passaggi si trova per F l'espressione:

$$F=\frac{R}{Z}+i\frac{I}{Z},\ \text{dove}\ R = 8\,(ac+bd)+4\,(c^2+d^2)\,(2-a),$$

$$T = 8\,(ad-bc)+4b\,(c^2+d^2),$$

$$Z = (a^2+b^2)\,(c^2+d^2-4c+4)+4\,(c^2+d^2)\,(1-a)+8\,(ac+bd);$$

dunque i coefficienti R/Z e T/Z dovranno essere interi relativi. Condizione analoga dovrà essere soddisfatta anche da V e da S.

Data l'estrema complessità di un'analisi che possa stabilire per quali quaterne di valori (a, b, c, d) ciò accada, si è tentata una via pratica selezionando i 29 numeri 0, ±1, ±2, ±3, ±4, ±5, ±6, ±8, ±9, ±10, ±12, ±14, ±15, ±16, ±18 e considerando tutte le possibili quaterne che da essi si possono ottenere, cioè $29^4 = 707281$ casi diversi. Tra questi andranno scartati tutti quelli per cui F e V non hanno contemporaneamente coefficienti interi relativi. Nell'ambito di questa scelta, il calcolo eseguito da Arnaldo Chiarini con un programma in FORTRAN ha provato l'esistenza di 704 poliedri immaginari. Di questi, 14 sono autoduali, cioè si presentano nella forma $\{a+ib,\ a+ib\}$, come ad esempio $\{6+2i, 6+2i\}$; 14 possiedono un numero immaginario puro di facce, come $\{2+i, 4-8i\}$ che possiede $8i$ facce; 18 possiedono un numero reale di facce, come $\{2-i,\ 3+3i\}$ e $\{2+i,\ 3-3i\}$ che ne possiedono 12. Coppie di poliedri siffatti, cioè coppie della forma $\{a+ib, c+id\}$ e $\{a-ib, c-id\}$ si diranno coniugati; allora anche i numeri delle rispettive facce saranno complessi coniugati. Si diranno invece autoconiugati i poliedri della forma $\{a+ib,\ a-ib\}$, che hanno la proprietà di avere un numero reale di spigoli, come ad esempio $\{3+i,\ 3-i\}$ che ne possiede 10; di tali poliedri ne esistono 22.

Vi sono ancora 14 casi in cui F assume un valore finito pur essendo $q = \infty$ e di conseguenza $V = 0$, e 14 casi in cui V assume un valore finito pur essendo $p = \infty$ e di conseguenza $F = 0$.

Infine esistono 14 quaterne (a, b, c, d), di cui una è per esempio (3, 1, 4, -2), che rendono nullo il denominatore Z nella $F = R/Z+iT/Z$: allora i valori di F, S e V diventano infiniti e i relativi poliedri immaginari degenerano in reti piane infinite di poligoni, come si può provare osservando che l'angolo γ formato da due facce contigue di uno dei poliedri in questione è di 180°. Infatti, ricorrendo all'ultima delle formule

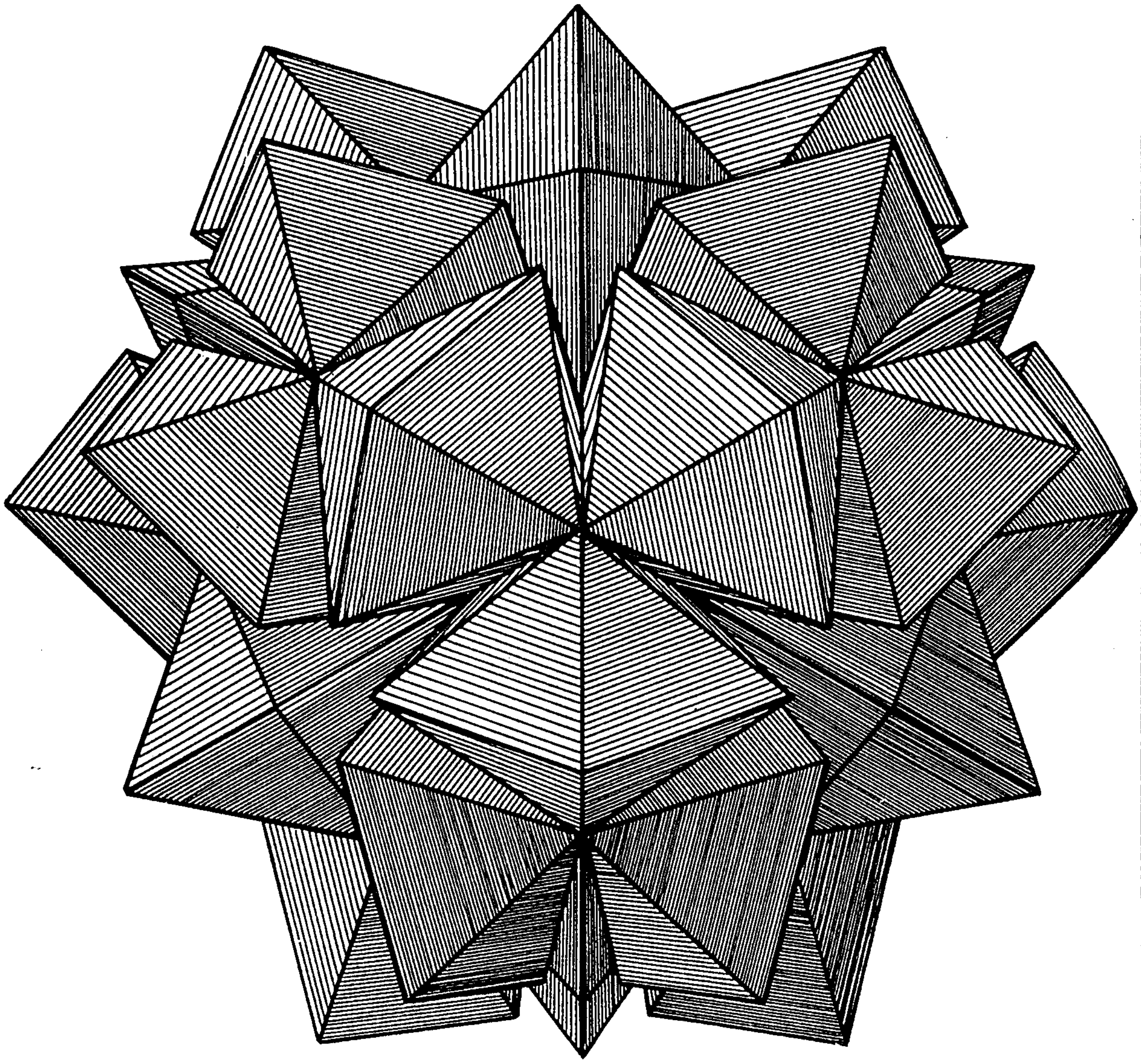


Fig. 7 M$_2$

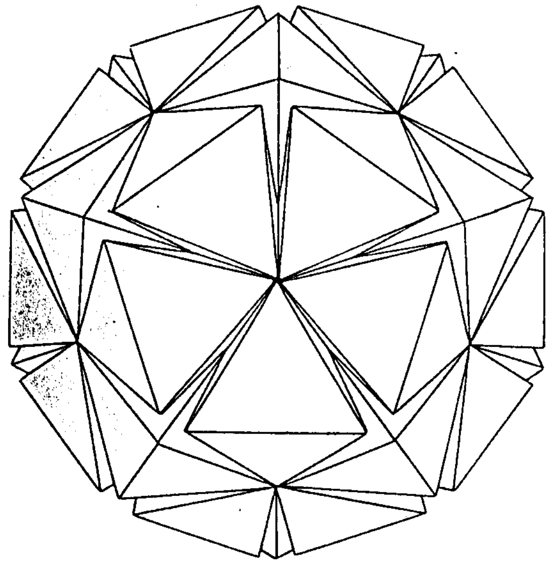


Fig. 9 O$_2$

(∞) e $\{\hat{4}, {}^{3}_{6}\}$ (∞). Immaginiamo di trovarci di fronte a questa rete, distesa all'infinito come una parete invalicabile: se potessimo osservarla dall'altra parte, vedremmo come concavo tutto ciò che da questa parte

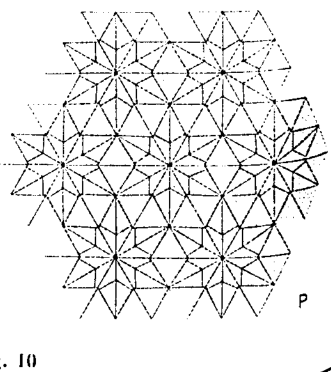
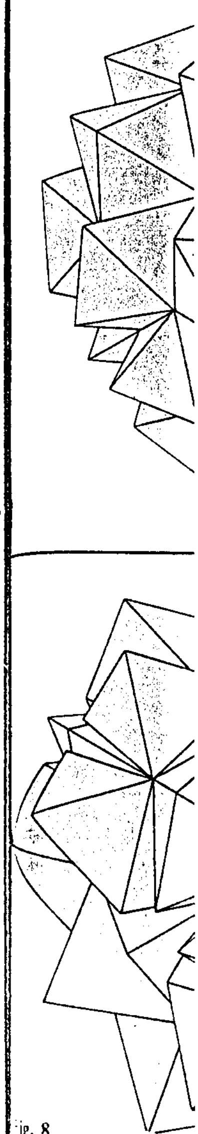


Fig. 10



ig. 8

osserviamo com
versa; quindi, p
medesimo corpo
dremmo sostanzi
tratta dunque ar
di una entità geo